

## מספרים מרוכבים:

### הצגה הקרטזית של מספרים מרוכבים

צורתו הקרטזית של מספר מרוכב היא:  $a + ib$  כאשר  $a$  ו- $b$  הם מספרים ממשיים ו- $i \equiv \sqrt{-1}$ .  
חלק ממשי      חלק מדומה

שני מספרים מרוכבים  $a + ib$  ו- $c + id$  שווים אם ורק אם  $a = c$  ו- $b = d$ .  
נוכל לראות את המספרים הממשיים כתת-קבוצה של המרוכבים כאשר  $b = 0$ .

הערך המוחלט  $|z|$  של  $a + ib$  מוגדר כ-  $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$

המספר הצמוד של  $z = a + ib$  מוגדר כ-  $a - ib$  ומסומן ב-  $\bar{z}$ .

את פעולות החשבון במספרים מרוכבים מבצעים כמו באלגברה של מספרים ממשיים, כאשר נזכור ש:  $i^2 = -1$

**דוגמאות: חיסור מספרים מרוכבים**  
 $(8 + 7i) - (15 - 9i) = -7 + 16i$

**כפל מספרים מרוכבים**  
 $(3 - 2i)(1 + 2i) = 3 - 2i + 6i - 4i^2 = 3 + 4i + 4 = 7 + 4i$

**ערך מוחלט של מספר מרוכב**  
 $|8 - 7i| = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{64 + 49} = \sqrt{113}$

### הכפלה בצמוד חלקי עצמו (לשם חילוק מספר מרוכב במספר אחר):

כאשר קיבלנו שבר ואנו רוצים לגלות איזה מספר מרוכב הוא מייצג נשתמש בשיטת ההכפלה של המונה והמכנה במספר

הצמוד של המכנה:  $\frac{(x - yi)}{(x - yi)}$ . בכך לא נשנה את ערך הביטוי אך נפשט אותו.

**דוגמא:**  
$$\frac{-3 + 2i}{1 + 4i} = \frac{(-3 + 2i) \cdot (1 - 4i)}{(1 + 4i) \cdot (1 - 4i)} = \frac{-3 + 2i + 12i + 8}{1 + 16} = \frac{5 + 14i}{17} = \frac{5}{17} + \frac{14}{17}i$$

באמצעות כפל מקוצר

### הוצאת שורש ריבועי בהצגה קרטזית:

נסביר באמצעות דוגמה: עלינו למצוא את השורש המרוכב של המספר  $3 + 4i$ .  
ראשית נסמן את הפתרון כ-  $x + iy$ .

$$x + iy = \sqrt{3 + 4i} \xrightarrow{\text{נעלה בריבוע}} (x + iy)^2 = 3 + 4i \rightarrow x^2 + 2xy - y^2 = 3 + 4i \xrightarrow{\text{נשווה ממשי ומדומה למדומה}} \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\sqrt{3 + 4i} = -2 - i$$

לאחר בידוד ה- $y$  והצבתו במשוואה הראשונה נקבל משוואה דו ריבועית נציב  $t$ , נפתור ונקבל 2 תשובות:

$$\sqrt{3 + 4i} = 2 + i$$

### הצגה הקוטבית של מספרים מרוכבים

כידוע, כל נקודה במישור הממשי ניתן לתאר ע"י זוג מספרים  $(x, y)$  הממוקמים במערכת צירים. בנוסף ניתן לתאר את הנקודה באמצעות מרחקה מהראשית  $r$  והזווית  $\theta$  שיוצר הקו שמחבר את הנקודה לראשית עם הצד החיובי של ציר  $x$ . ניתן לראות ש-  $x = R \cos \theta$ ,  $y = R \sin \theta$ . כלומר המספר המרוכב  $z$  יכול להיכתב כך:  $z = x + iy = R(\cos \theta + i \sin \theta)$ . כתיבה זו נקראת הצורה הקוטבית (פולארית) של המספר המרוכב.

**R** נקרא הערך המוחלט של המספר המרוכב, ואילו  $\theta$  נקראת הזווית/הארגומנט.

**מעבר מהצגה קרטזית להצגה קוטבית באמצעות צמד הנוסחאות:**  $\tan \theta = \frac{y}{x}$ ,  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$

**חשוב מאד:** המחשבון נותן זווית אחת המתאימה  $\tan \theta$ , אולם יש אחת נוספת במרחק  $180^\circ$ . עלינו להסתכל על מיקום הנקודה (איזה רביע היא נמצאת) ולפי זה להחליט מה הזווית המתאימה למספר המרוכב הנ"ל.

\* היתרון בכתיבה הקוטבית של המספר המרוכב הוא הנוחות בחישוב כפל, חילוק ובעיקר **חזקות**:

בהנתן 2 מספרים מרוכבים:  $Z_1 = x_1 + iy_1 = R_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ ,  $Z_2 = x_2 + iy_2 = R_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$

$$Z_1 \cdot Z_2 = R_1 \cdot R_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{R_1}{R_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

**\*משפט דה-מואבר:** (משפט המאפשר לחשב בקלות חזקות של מספר מרוכב):

$$Z^n = R^n [\cos(n \cdot \theta) + i \sin(n \cdot \theta)] \quad \text{בהנתן המספר המרוכב } Z = r[\cos \theta + i \sin \theta] \text{ אז מתקיים}$$

**שורשים מסדר n של מספר מרוכב**

בהינתן המספר המרוכב  $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ , ואנו רוצים למצוא את n הפתרונות המקיימים:  $Z^n = r[\cos \theta + i \sin \theta]$   
 נשתמש בנוסחה לחישוב n השורשים ה-n ים השונים:

$$Z_k = \sqrt[n]{r} \left[ \cos\left(\frac{\theta + 360k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 360k}{n}\right) \right] \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \text{ (מציבים כל פעם k אחר)}$$

**דוגמה:** חשב את כל הערכים של w המקיימים  $w^5 = -32$ :

$$w^5 = -32 = 32(\cos 180 + i \sin 180) \quad \text{ראשית נכתוב את המספר -32 בצורה הקוטבית:}$$

$$w = \sqrt[5]{-32} = \sqrt[5]{32} \left[ \cos\left(\frac{180 + 360k}{5}\right) + i \sin\left(\frac{180 + 360k}{5}\right) \right] \quad \text{לפי משפט דה-מואבר-}$$

$$w_1 = 2 \left( \cos \frac{180}{5} + i \sin \frac{180}{5} \right) \quad k = 0$$

$$w_2 = 2 \left( \cos \frac{540}{5} + i \sin \frac{540}{5} \right) \quad k = 1$$

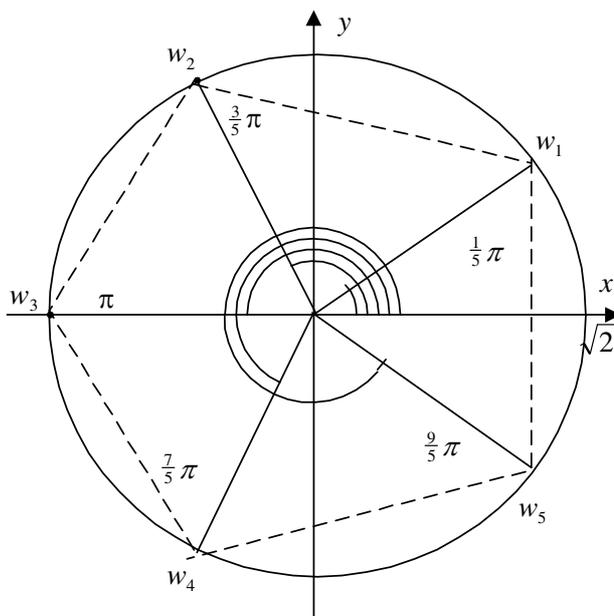
$$w_3 = 2 \left( \cos \frac{900}{5} + i \sin \frac{900}{5} \right) = -2 \quad k = 2$$

$$w_4 = 2 \left( \cos \frac{1260}{5} + i \sin \frac{1260}{5} \right) \quad k = 3$$

$$w_5 = 2 \left( \cos \frac{1620}{5} + i \sin \frac{1620}{5} \right) \quad k = 4$$

עבור  $k = 5, 6, \dots$  נחזור על אותם ערכים שכבר קיבלנו ולכן הם הפתרונות או השורשים היחידים של המשוואה הנתונה.

אם נתאר את ערכי הפתרונות במישור המרוכב, נקבל את התיאור הבא:



שימו לב שהנקודות  $w_1, \dots, w_5$  נמצאות על קדקודי מחומש משוכלל.