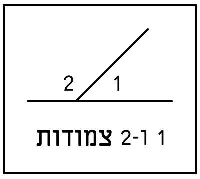
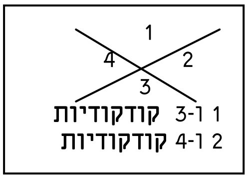
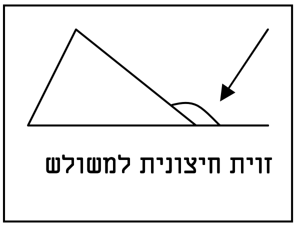
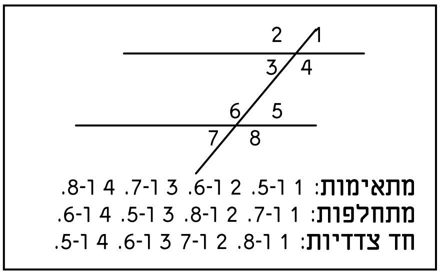
<u>הנדסת המישור – הגדרות ומשפטים</u>
<u>זוית, משולש, מקבילית, מלבן, ריבוע, מעוין, טרפז, שטחים משפט פיתגורס, מעגל</u>

<u>זוויות</u>









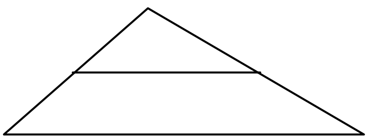
<u>משפטים</u>
- סכום זויות צמודות 180 מעלות.
- זויות קודקודיות שוות.
- בהנתן שני ישרים מקבילים הנחתכים על ידי ישר שלישי אז כל שתי זויות מתאימות שוות, כל שתי זויות מתחלפות שוות וסכום שתי זויות חד צדדיות הוא 180 מעלות.
- (הפוך)- בהנתן שני ישרים הנחתכים על ידי ישר שלישי אם קיים זוג זויות מתאימות שוות, או זוג זויות מתחלפות שוות, או סכום זוג זויות חד צדדיות הוא 180 מעלות, אז הישרים מקבילים.
- סכום הזויות במצולע בעל n צלעות הוא : $180(n-2)$ מעלות.

....

<u>משולש</u>
חוצה זוית - קטע המחבר קודקוד במשולש עם הצלע שמולו <u>וחוצה</u> את הזוית.
גובה - קטע המחבר קודקוד במשולש עם הצלע שמולו (או המשכה) <u>ומאונך</u> לה.
תיכון - קטע המחבר קודקוד במשולש עם <u>אמצע</u> הצלע שמולו.
אנך אמצעי לצלע – ישר העובר דרך <u>אמצע</u> צלע במשולש <u>ומאונך</u> לה.
היקף משולש – סכום שלושת הצלעות.

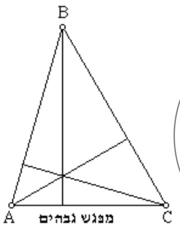
<u>משפטים</u>
- זוית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזויות במשולש שאינן צמודות לה (גדולה מכל אחת מהן בנפרד).
- זויות הבסיס במשולש שו״ש שוות. אם במשולש יש שתי זויות שוות אז הוא שו״ש.
- במשולש שווה צלעות כל אחת מהזויות שווה 60 מעלות.
- במשולש שווה שוקיים חוצה זוית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים. (המשפט ההפוך גם הוא נכון).
- במשולש (שאינו שווה צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זוית גדולה יותר (ולהיפך).
- סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.

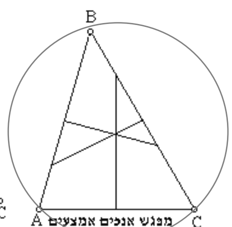
- כל נקודה על **חוצה זווית** נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.
- אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית , אז היא נמצאת על **חוצה הזווית.**
- כל נקודה הנמצאת על **האנך האמצעי** של קטע , נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.
- אם נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, אז היא נמצאת על **האנך האמצעי** לקטע.



<u>קטע אמצעים במשולש</u>
קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש.
<u>משפטים</u>
- קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
- <u>(הפוך)</u> קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה גם את הצלע השניה.

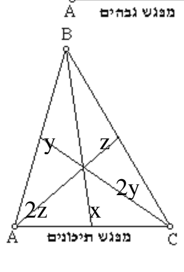
<u>משפטי חפיפה</u>
צ.ז.צ - אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי צלעות והזוית שביניהן אז המשולשים חופפים.
ז.צ.ז - אם בשני משולשים שוות בהתאמה צלע ושתי הזויות שלידה אז המשולשים חופפים.
צ.צ.צ - אם בשני משולשים שוות בהתאמה שלוש הצלעות אז המשולשים חופפים.
צ.צ.ז(גדולה)- אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי צלעות והזוית שמול הצלע הגדולה אז המשולשים חופפים.

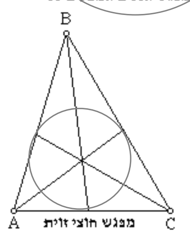




<u>משפטי מפגש</u>

- שלושת **הגבהים** במשולש נפגשים בנקודה אחת.
- שלושת **התיכונים** במשולש נפגשים בנקודה אחת ומחלקים זה את זה לשליש ושני - שליש (החלק הקרוב לקודקוד הוא הגדול).
- שלושת **האנכים** האמצעים במשולש נפגשים בנקודה אחת שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
- שלושת **חוצי הזויות** במשולש נפגשים בנקודה אחת שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.

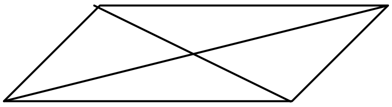




<u>משולש ישר זוית</u>
<u>משפטים</u>
- במשולש ישר זוית שאחת מזויותיו $30°$, הניצב מול זוית זו שווה למחצית היתר.
- (הפוך) אם במשולש ישר זוית אחד הניצבים שווה למחצית היתר אזי הזוית מול ניצב זה שווה $30°$.
- במשולש ישר זוית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
- (הפוך) אם במשולש התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה אזי המשולש הוא ישר זוית.

מקבילית

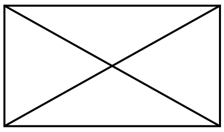
מרובע שכל צמד צלעות נגדיות שלו מקבילות.



משפטים
- צלעות נגדיות במקבילית שוות.
- זויות נגדיות במקבילית שוות.
- זויות סמוכות במקבילית משלימות ל- $180°$.
- האלכסונים במקבילית חוצים זה את זה (אך לא בהכרח שווים זה לזה).
- האלכסונים במקבילית מחלקים את המקבילית ל- 4 משולשים השווים בשטחם.

משפטים בעזרתם מוכיחים שמרובע הוא מקבילית
1. מרובע בו צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.
2. מרובע בו זויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
3. מרובע בו האלכסונים חוצים זה את זה הוא מקבילית.
4. מרובע בו זוג אחד של צלעות נגדיות שוות ומקבילות הוא מקבילית.

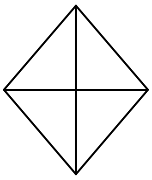
מלבן



מקבילית שאחת מזויותיה שווה $90°$.

משפטים
- האלכסונים במלבן שווים וחוצים זה את זה.
- מקבילית שאלכסוניה שווים היא מלבן.

מעוין



מקבילית שכל צלעותיה שוות או מרובע שכל צלעותיו שוות .

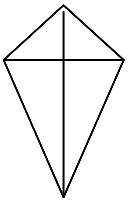
משפטים
- אלכסוני המעוין חוצים זה את זה, חוצים את זויות המעוין ומאונכים זה לזה.

ריבוע

מלבן בעל שתי צלעות סמוכות שוות או מעוין בעל זוית $90°$.

משפטים
- כל צלעות וזויות הריבוע שוות.
- האלכסונים בריבוע מאונכים זה לזה, חוצים זה את זה, שווים זה לזה וחוצים את זויות הריבוע.

דלתון

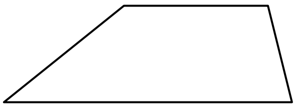


מרובע המורכב משני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף.

משפט
- האלכסון הראשי בדלתון – חוצה את זוית הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

טרפז

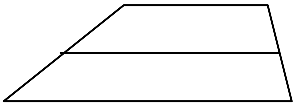
מרובע שרק זוג אחד של צלעותיו הנגדיות מקבילות. (הצלעות המקבילות נקראות בסיסים והאחרות שוקיים).
טרפז ישר זוית - טרפז שאחת מזויותיו ישרה.
טרפז שווה שוקיים - טרפז בו שתי השוקיים שוות.



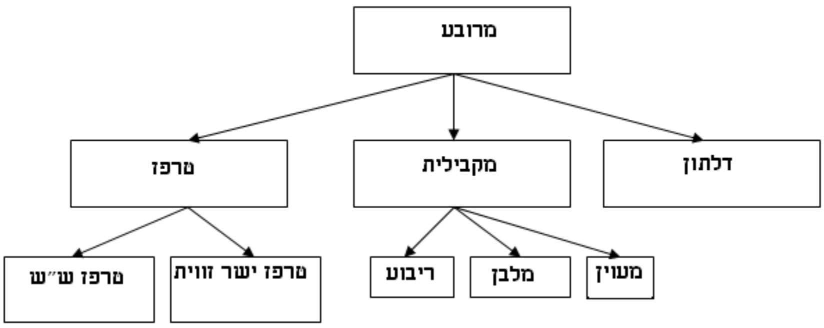
משפטים
- סכום הזויות ליד כל שוק בטרפז שווה ל- $180°$.
- זויות הבסיס בטרפז שווה שוקיים שוות.
- (הפוך) אם זויות אחד הבסיסים בטרפז שוות אז הוא טרפז שווה שוקיים.
- בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים.

קטע אמצעים בטרפז

קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.



משפטים
- קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
- (הפוך) קטע היוצא מאמצע שוק בטרפז ומקביל לבסיס חוצה גם את השוק השניה.



שטחים

שטח משולש: צלע * הגובה לצלע.
2

שטח מלבן: צלע * צלע סמוכה.

שטח טרפז: (בסיס+בסיס) * הגובה.
2

שטח מעוין: (אלכסון * אלכסון) או צלע * הגובה לצלע.
2

שטח משולש ישר זוית: ניצב * ניצב.
2

שטח מקבילית: צלע * הגובה לצלע.

שטח דלתון: (אלכסון * אלכסון)
2

- **משפט**: תיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.
- **משפט**: האלכסונים במקבילית מחלקים את המקבילית ל – 4 משולשים שווי שטח.

הערה: אותו משפט נכון גם למלבן, ריבוע ומעוין (כל סוגי המקביליות)

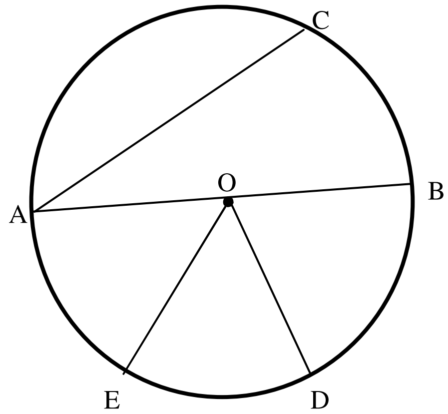
משפט פיתגורס

- במשולש ישר זוית ABC, בו B קודקוד הזוית הישרה, AB ניצב, BC ניצב, AC יתר.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

- (המשפט ההפוך) אם במשולש מתקיים: צלע בריבוע + צלע בריבוע = לצלע השלישית בריבוע, אזי המשולש הוא ישר זוית.

מעגל



הגדרות

מיתר - קטע המחבר צמד נקודות על המעגל (**AC**)

קוטר - מיתר העובר דרך המרכז(**AB**) .

קשת - חלק מהמעגל בין שתי נקודות(**ED**) .

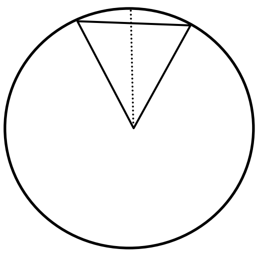
זוית מרכזית - זוית שקודקודה במרכז המעגל(**EOD**) .

משפטים

- למיתרים שווים שייכות קשתות שוות וזויות מרכזיות שוות.
- לקשתות שוות שייכים מיתרים שווים וזויות מרכזיות שוות.
- לזויות מרכזיות שוות שייכים מיתרים שווים וקשתות שוות.

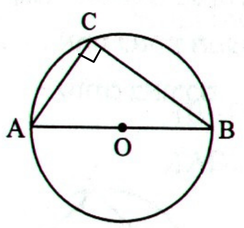
הגדרות

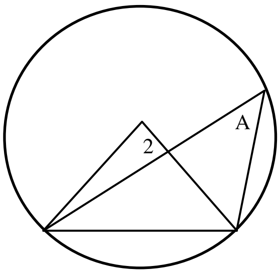
מרחק המיתר ממרכז המעגל - אורך הקטע המחבר את מרכז המעגל למיתר ומאונך לו.



משפטים

- מיתרים שווים במעגל נמצאים במרחקים שווים מהמרכז ולהפך.
- אם במעגל מיתר אחד גדול ממיתר שני אז מרחקו מהמרכז קטן משל השני.
- אנך ממרכז המעגל למיתר חוצה:
  א. את המיתר.
  ב. את הזוית המרכזית השייכת למיתר.
  ג. את הקשת השייכת למיתר.
  ולהפך





הגדרה

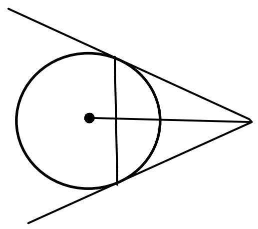
זוית היקפית - זוית שקודקודה על המעגל ושוקיה מיתרים במעגל .

משפטים

- זוית היקפית שווה למחצית הזוית המרכזית הנשענת על אותה קשת.
- זויות היקפיות הנשענות על אותה קשת שוות זו לזו.
- זויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות - שוות זו לזו.
- זוית היקפית הנשענת על קוטר שווה $90°$ ולהפך.
- לזויות היקפיות שוות שייכים מיתרים שווים ולהפך.

הגדרה

משיק למעגל - ישר שיש לו נקודה אחת ויחידה משותפת עם המעגל .

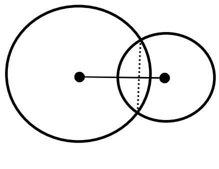


משפטים

- משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
- שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
- הקטע המחבר את מרכז המעגל עם הנקודה ממנה יוצאים שני משיקים - חוצה את הזוית בין המשיקים, מאונך למיתר המחבר את נקודות ההשקה וחוצה אותו.
- זוית בין משיק ומיתר שווה לזוית ההיקפית הנשענת על המיתר.

משפטים

- במרובע החסום במעגל סכום הזויות הנגדיות שווה ל- $180°$.
- (הפוך) אם במרובע סכום זויות נגדיות שווה ל- $180°$, ניתן לחוסמו במעגל.
- במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.
- (הפוך) אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז אפשר לחסום בו מעגל.
- כל מצולע משוכלל יכול להחסם ולחסום מעגל.
- קטע המרכזים לשני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.



<u>פרופורציה ודמיון</u>

משפט תלס

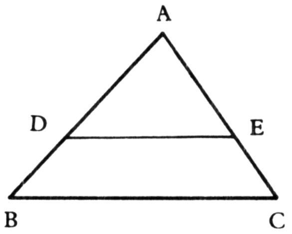
אם נתון: $DE \parallel BC$

אזי מתקיים

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$$

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{CE}$$

משפט הפוך למשפט תאלס:
אם מתקיימת אחת הפרופורציות הנ״ל אזי הישרים מקבילים.

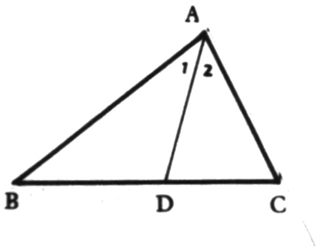


משפט חוצה זוית במשולש

אם נתון ש- AD חוצה את זוית A

אזי: $$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$$

במילים מפורשות: חוצה זוית במשולש מחלק את הצלע שמול הזוית חלוקה ביחס השווה ליחס בין צלעות הזוית.
משפט הפוך למשפט חוצה זוית:
אם מתקיימת הפרופורציות הנ״ל אזי AD חוצה זוית.



<u>משולשים דומים</u>

<u>הגדרה:</u> משולשים דומים הם משולשים ששלושת זויותיהם שוות בהתאמה והיחס בין צלעותיהם המתאימות שווה.

<u>משפט דמיון ראשון (צ.ז.צ)</u>

אם נתון ש- $\angle D = \angle A$ וגם $\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}$

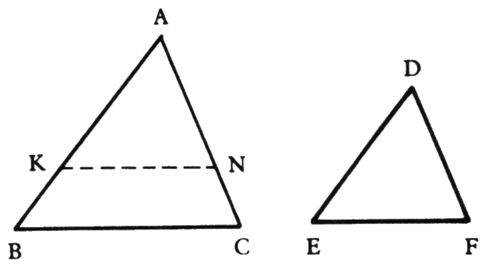
אזי משולש ABC דומה למשולש DEF .
במילים מפורשות: אם בשני משולשים שתי צלעות פרופורציוניות והזוית ביניהן שווה, אז המשולשים דומים.

<u>משפט דמיון שני (ז.ז.ז)</u>
אם שלוש זויות במשולש אחד שוות בהתאמה לשלוש זויות במשולש שני אזי המשולשים דומים.

<u>משפט דמיון שלישי (צ.צ.צ)</u>

אם נתון ש- $$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{DF}=\frac{BC}{EF}$$

אזי משולש ABC דומה למשולש DEF .
מילים מפורשות: אם בשני משולשים שלושת הצלעות פרופורציוניות אז המשולשים דומים.



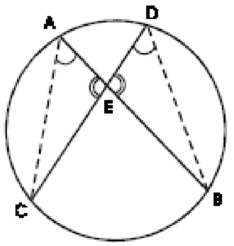
משפטים
- גבהים במשולשים דומים מתיחסים זה לזה כיחס הצלעות המתאימות.
- חוצי זוית במשולשים דומים מתיחסים זה לזה כיחס הצלעות המתאימות.
- תיכונים מתאימים במשולשים דומים מתיחסים זה לזה כיחס הצלעות המתאימות.
- שטחי משולשים דומים מתיחסים זה לזה כיחס הדמיון **בריבוע**.

משפט משולש ישר זווית
- במשולש ישר זוית הגובה ליתר מחלק את המשולש לשני משולשים דומים שכל אחד מהם דומה למשולש המקורי.

פרופורציה במעגל – משפטים

קיימים שלושה משפטים בנושא זה ויש לדעת להוכיח משפטים אלה.
ההוכחה נעשית באמצעות משפט דמיון ז.ז. ובעזרת פירוק המשולשים (כאן מובאות התשובות הסופיות בלבד). בניות העזר להוכחת המשפטים משורטטות בקווקוו.

1. שני מיתרים הנחתכים במעגל



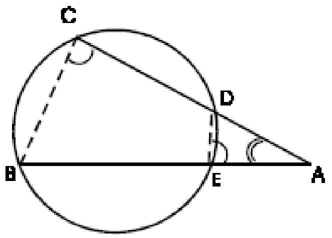
שני מיתרים הנחתכים במעגל, מחלקים זה את זה כך שמכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.

הוכחת המשפט מסתמכת על זוויות היקפיות הנשענות על קשתות שוות וזוויות קודקודיות שוות.

$\triangle DBE \sim \triangle ACE$ ולכן אחרי הפירוק: $\underline{AE \cdot EB = DE \cdot EC}$

הערה:
אם שני קטעים נחתכים ומכפלת חלקי הקטע האחד שווה למכפלת חלקי הקטע האחר, אז נית להעביר מעגל דרך ארבע קצות שני הקטעים. (בנקודות C, B, D, A)

2. שני חותכים למעגל

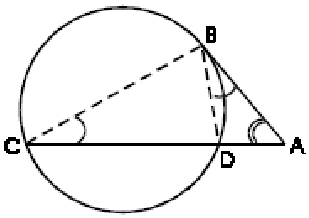


אם למעגל יוצאים שני חותכים מאותה נקודה אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

הוכחת המשפט מסתמכת על מרובע חסום במעגל.

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ולכן אחרי הפירוק: $\underline{AD \cdot AC = AE \cdot AB}$

3. חותך ומשיק



אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני זהו גודל קבוע ושווה לריבוע המשיק.

(התוצאה תהיה קבועה לכל החותכים היוצאים מנקודה A למעגל)

הוכחת המשפט מסתמכת על זווית בין משיק למיתר.

$\triangle ABD \sim \triangle ACB$ ולכן אחרי הפירוק: $\underline{AB^2 = AD \cdot AC}$